Линейная алгебра

Векторы - операции над векторами

-линейные подпространства и линейная оболочка

-линейная независимость и базис

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Вектором в n-мерном евклидовом пространстве R^n называется упорядоченный набор чисел x = (x1,x2,…,xn) – собственно, элемент пространства R^n.

Часто вектор удобнее записывать в столбец: (x1)

X=(x2)

(…)

(xn)

СЛОЖЕНИЕ И УМНОЖЕНИЕ НА СКАЛЯР

Наблюдение. Векторы можно складывать и умножать на скаляр (число). Результат будет вектором, элементы которого суть результаты поэлементного применения операции.

ЛИНЕЙНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА

-Вектор пространство R^n замкнуто относительно операций сложения и умножения на скаляр

-Обобщим это наблюдение

Определение. Линейным (или векторным) подпространством векторного пространства называется множество векторов, замкнутое относительно операций сложения и умножения на скаляр.

ЛИНЕЙНАЯ ОБОЛОЧКА

Определение. Линейной оболочкой векторов u1,u2,…,un называется множество всех линейных комбинаций этих векторов с произвольными коэффициентами

Утверждение. Линейная оболочка произвольного числа векторов является линейным подпространством в R^n.

Пример. На данной картинке <x,y> - плоскость

ЛИНЕЙНАЯ НЕЗАВИСИМОСТЬ

Определение. Векторы u1,u2,…,un называется линейно независимыми, если никакая нетривиальная линейная комбинация этих векторов не равна нуль-вектору. Иными словами, для любых ai e R, не все из которых нулевые , выполняются

БАЗИС

Определение. Пусть М – линейное подпространство.

Базисом в М называется минимальная система векторов u1,u2,…,un, для которой М = (u1,u2,…,un).

Свойства базиса

-Базис является ЛНЗ системой

-Векторы из М выражается через базис единственным способом

-Любую ЛНЗ систему можно дополнить до базиса

-В любой системе образующих можно выбрать базис

-Любые два базиса равномощны

Крайнее свойство свидетельствует о корректности определения размерности линейного пространства как размера базиса в этом линейном пространстве.

**Теорема.** n+1 векторов в n- мерном пространстве всегда линейно зависимы.

Доказательство. От противного. Они линейно независимы – можно дополнить до базиса – противоречие с тем, что любые два базиса равномощны.